

# Chapitre 1. Séries doubles et indépendance

R2.06 – Techniques quantitatives et représentations 2

Dominique Fourer



Département TC-Juvisy

Semestre 2 – 2025/2026

# Syllabus

## Contenu du cours :

- Analyse conjointe de deux variables statistiques
- Test d'indépendance du Chi-2
- Corrélation et ajustement affine
- Séries chronologiques

## Format

- 4 chapitres (CM)
- 8 séances de TD (+1 séance révision en FI)
- Évaluation : 1 devoirs surveillé (+contrôle continu) - TP)

Suivi : <https://fourer.fr/Ens/2526/TQR2>

# Statistique descriptive

Ensemble des méthodes permettant une analyse quantitative d'une population selon les phénomènes repérés de même nature (variables).

- Population : ensemble des individus (ou unités statistiques) étudiés
- Variable statistique : elle associe une valeur à chaque individu. Elle est quantitative lors que ses valeurs sont numériques ou qualitatives le cas contraire
- Distribution statistique : modèle probabiliste permettant de modéliser les valeurs d'une variable statistique
- Paramètre : caractéristiques d'une loi de probabilité liée à une variable

## Définitions :

Table – Liens entre probabilités et statistiques (terminologie).

Notions probabilistes	Notions statistiques
Probabilité d'un événement Variable aléatoire Loi de probabilité Espérance mathématique Réalisation d'une v.a.	Fréquence relative Variable statistique Distribution statistique Moyenne arithmétique individu (ou unité statistique)

## Effectifs et fréquences

Pour une seule variable statistique  $X$  prenant des valeurs possible  $x_1, x_2, \dots, x_p$  considérant une population globale de taille  $N$ .

### effectif

On note  $n_i$  l'effectif de la valeur  $x_i$

$$n_i, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, p\} \quad (1)$$

On remarque que  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$

### fréquence

$$f_i = \frac{n_i}{N} \quad (2)$$

On remarque que  $f_1 + f_2 + \dots + f_p = 1$

# Contexte et notations

## VARIABLES STATISTIQUES

- Deux variables  $X, Y$ , peu importe leur type.
- Sur une même population de taille  $N$ .
- Valeurs ou centres des classes :  $x_1, x_2, \dots, x_p$  et  $y_1, y_2, \dots, y_q$ .

## Contexte et notations

### VARIABLES STATISTIQUES

- Deux variables  $X, Y$ , peu importe leur type.
- Sur une même population de taille  $N$ .
- Valeurs ou centres des classes :  $x_1, x_2, \dots, x_p$  et  $y_1, y_2, \dots, y_q$ .

### TROIS POINTS-DE-VUE

- Distribution jointe : étude du couple  $(X, Y)$ .
- Distributions marginales : études de  $X$  ou  $Y$  isolément.
- Distributions conditionnelles : études de l'une par rapport à l'autre.

## Contexte et notations

### VARIABLES STATISTIQUES

- Deux variables  $X, Y$ , peu importe leur type.
- Sur une même population de taille  $N$ .
- Valeurs ou centres des classes :  $x_1, x_2, \dots, x_p$  et  $y_1, y_2, \dots, y_q$ .

### TROIS POINTS-DE-VUE

- Distribution jointe : étude du couple  $(X, Y)$ .
- Distributions marginales : études de  $X$  ou  $Y$  isolément.
- Distributions conditionnelles : études de l'une par rapport à l'autre.

### ATTENTION !

Désormais, l'indice  $i$  servira à indexer les données relatives à  $X$  et l'indice  $j$  celles relatives à  $Y$ .

- 1 Trois types de distribution
  - Distribution jointe
  - Distributions marginales
  - Distributions conditionnelles
  
- 2 Représentations graphiques
  
- 3 Indépendance statistique

- 1 Trois types de distribution
  - Distribution jointe
  - Distributions marginales
  - Distributions conditionnelles

2 Représentations graphiques

3 Indépendance statistique

## Définitions et notations

### Définition

- **Effectif conjoint** : nombre d'individus associés **à la fois** à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .
- **Fréquence conjointe** : proportion d'individus associés **à la fois** à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .

# Définitions et notations

## Définition

- **Effectif conjoint** : nombre d'individus associés à la fois à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .
- **Fréquence conjointe** : proportion d'individus associés à la fois à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .

## NOTATIONS

- Effectif conjoint associé à la fois aux valeurs  $x_i$  et  $y_j$  :  $n_{ij}$ .
- Fréquence conjointe associée à la fois aux valeurs  $x_i$  et  $y_j$  :  $f_{ij}$ .

# Définitions et notations

## Définition

- **Effectif conjoint** : nombre d'individus associés à la fois à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .
- **Fréquence conjointe** : proportion d'individus associés à la fois à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .

## NOTATIONS

- Effectif conjoint associé à la fois aux valeurs  $x_i$  et  $y_j$  :  $n_{ij}$ .
- Fréquence conjointe associée à la fois aux valeurs  $x_i$  et  $y_j$  :  $f_{ij}$ .

# Définitions et notations

## Définition

- **Effectif conjoint** : nombre d'individus associés à la fois à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .
- **Fréquence conjointe** : proportion d'individus associés à la fois à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .

## NOTATIONS

- Effectif conjoint associé à la fois aux valeurs  $x_i$  et  $y_j$  :  $n_{ij}$ .
- Fréquence conjointe associée à la fois aux valeurs  $x_i$  et  $y_j$  :  $f_{ij}$ .

# Définitions et notations

## Définition

- **Effectif conjoint** : nombre d'individus associés à la fois à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .
- **Fréquence conjointe** : proportion d'individus associés à la fois à la même valeur de  $X$  et de  $Y$ .

## NOTATIONS

- Effectif conjoint associé à la fois aux valeurs  $x_i$  et  $y_j$  :  $n_{ij}$ .
- Fréquence conjointe associée à la fois aux valeurs  $x_i$  et  $y_j$  :  $f_{ij}$ .

## FORMULE DE CALCUL

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}.$$

# Tables de contingence

## Définition

**Table de contingence** des effectifs ou des fréquences : « tableau » représentant les effectifs conjoints ou les fréquences conjoints.

# Tables de contingence

## Définition

**Table de contingence** des effectifs ou des fréquences : « tableau » représentant les effectifs conjoints ou les fréquences conjoints.

## PRINCIPES DE CONSTRUCTION

- Une valeur de  $X$  par **ligne** (indice = numéro de ligne).
- Une valeur de  $Y$  par **colonne** (indice = numéro de colonne).
- À l'intersection d'une ligne et d'une colonne :
  - **effectif conjoint** *ad-hoc* si table de contingence des **effectifs**.
  - **fréquence conjointe** *ad-hoc* si table de contingence des **fréquences**.

# Tables de contingence

## Définition

**Table de contingence** des effectifs ou des fréquences : « tableau » représentant les effectifs conjoints ou les fréquences conjoints.

## PRINCIPES DE CONSTRUCTION

- Une valeur de  $X$  par **ligne** (indice = numéro de ligne).
  - Une valeur de  $Y$  par **colonne** (indice = numéro de colonne).
  - À l'intersection d'une ligne et d'une colonne :
    - **effectif conjoint** *ad-hoc* si table de contingence des **effectifs**.
    - **fréquence conjointe** *ad-hoc* si table de contingence des **fréquences**.
- *Les tables des effectifs et des fréquences sont **proportionnelles**.*

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

### TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>A</b>				
<b>B</b>				
<b>C</b>				

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

### TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>A</b>				
<b>B</b>				
<b>C</b>				

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

### TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>				
2	<b>B</b>				
3	<b>C</b>				

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

### TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>				
2	<b>B</b>				
3	<b>C</b>				

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)
- Une valeur de  $Y$  par colonne. (Quelle est la colonne 3 ?)

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

		1	2	3	4
	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>				
2	<b>B</b>				
3	<b>C</b>				

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)
- Une valeur de  $Y$  par colonne. (Quelle est la colonne 3 ?)

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

		1	2	3	4
	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>				
2	<b>B</b>				
3	<b>C</b>				

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)
- Une valeur de  $Y$  par colonne. (Quelle est la colonne 3 ?)
- La première cellule indique qu'il s'agit d'une table de contingence.

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

		1	2	3	4
	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>	0	0	2	3
2	<b>B</b>	1	3	4	2
3	<b>C</b>	4	6	5	0

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)
- Une valeur de  $Y$  par colonne. (Quelle est la colonne 3 ?)
- La première cellule indique qu'il s'agit d'une table de contingence.

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

		1	2	3	4
	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>	0	0	2	3
2	<b>B</b>	1	3	4	2
3	<b>C</b>	4	6	5	0

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)
- Une valeur de  $Y$  par colonne. (Quelle est la colonne 3 ?)
- La première cellule indique qu'il s'agit d'une table de contingence.
- On lit :  $n_{23}$  ,  $n_{32}$  ,  $n_{14}$  et  $n_{41}$

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

		1	2	3	4
	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>	0	0	2	3
2	<b>B</b>	1	3	4	2
3	<b>C</b>	4	6	5	0

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)
- Une valeur de  $Y$  par colonne. (Quelle est la colonne 3 ?)
- La première cellule indique qu'il s'agit d'une table de contingence.
- On lit :  $n_{23} = 4$ ,  $n_{32}$  ,  $n_{14}$  et  $n_{41}$

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

		1	2	3	4
	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>	0	0	2	3
2	<b>B</b>	1	3	4	2
3	<b>C</b>	4	6	5	0

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)
- Une valeur de  $Y$  par colonne. (Quelle est la colonne 3 ?)
- La première cellule indique qu'il s'agit d'une table de contingence.
- On lit :  $n_{23} = 4$ ,  $n_{32} = 6$ ,  $n_{14}$  et  $n_{41}$

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

		1	2	3	4
	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>	0	0	2	3
2	<b>B</b>	1	3	4	2
3	<b>C</b>	4	6	5	0

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)
- Une valeur de  $Y$  par colonne. (Quelle est la colonne 3 ?)
- La première cellule indique qu'il s'agit d'une table de contingence.
- On lit :  $n_{23} = 4$ ,  $n_{32} = 6$ ,  $n_{14} = 3$  et  $n_{41}$

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

		1	2	3	4
	<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
1	<b>A</b>	0	0	2	3
2	<b>B</b>	1	3	4	2
3	<b>C</b>	4	6	5	0

- Une valeur de  $X$  par ligne. (Quelle est la ligne 2 ?)
- Une valeur de  $Y$  par colonne. (Quelle est la colonne 3 ?)
- La première cellule indique qu'il s'agit d'une table de contingence.
- On lit :  $n_{23} = 4$ ,  $n_{32} = 6$ ,  $n_{14} = 3$  et  $n_{41}$  n'existe pas.

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

2/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>A</b>	0	0	2	3
<b>B</b>	1	3	4	2
<b>C</b>	4	6	5	0

TABLE DE CONTINGENCE DES FRÉQUENCES

## Exemple (TD 1 – Exercice 1)

2/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS

$(X, Y)$	0	1	2	3
A	0	0	2	3
B	1	3	4	2
C	4	6	5	0

TABLE DE CONTINGENCE DES FRÉQUENCES (DIVISION PAR  $N = 30$ )

$(X, Y)$	0	1	2	3
A	0	0	0,0667	0,1
B	0,0333	0,1	0,1333	0,0667
C	0,1333	0,2	0,1667	0

# Définitions et calculs

## Définition

- **Effectif marginal** de  $X$  (resp. de  $Y$ ) : nombre d'individus associés à une même valeur de  $X$  (resp. de  $Y$ ).
- **Fréquence marginale** de  $X$  (resp. de  $Y$ ) : proportion d'individus associés à une même valeur de  $X$  (resp. de  $Y$ ).

# Définitions et calculs

## Définition

- **Effectif marginal** de  $X$  (resp. de  $Y$ ) : nombre d'individus associés à une même valeur de  $X$  (resp. de  $Y$ ).
- **Fréquence marginale** de  $X$  (resp. de  $Y$ ) : proportion d'individus associés à une même valeur de  $X$  (resp. de  $Y$ ).

## CALCULS À PARTIR DES TABLES DE CONTINGENCE

- Effectif marginal de  $X$  : **somme ligne par ligne** des  $n_{ij}$ .
- Fréquence marginale de  $X$  : **somme ligne par ligne** des  $f_{ij}$ .

## Définitions et calculs

### Définition

- **Effectif marginal** de  $X$  (resp. de  $Y$ ) : nombre d'individus associés à une même valeur de  $X$  (resp. de  $Y$ ).
- **Fréquence marginale** de  $X$  (resp. de  $Y$ ) : proportion d'individus associés à une même valeur de  $X$  (resp. de  $Y$ ).

### CALCULS À PARTIR DES TABLES DE CONTINGENCE

- Effectif marginal de  $X$  : **somme ligne par ligne** des  $n_{ij}$ .
- Fréquence marginale de  $X$  : **somme ligne par ligne** des  $f_{ij}$ .
- Effectif marginal de  $Y$  : **somme colonne par colonne** des  $n_{ij}$ .
- Fréquence marginale de  $Y$  : **somme colonne par colonne** des  $f_{ij}$ .

# Tables de contingence « complétées »

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS (TD 1 – EXERCICE 1)

<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	
<b>A</b>	0	0	2	3	
<b>B</b>	1	3	4	2	
<b>C</b>	4	6	5	0	

## Tables de contingence « complétées »

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS (TD 1 – EXERCICE 1)

<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>X</b>
<b>A</b>	0	0	2	3	5
<b>B</b>	1	3	4	2	10
<b>C</b>	4	6	5	0	15

- Effectifs marginaux de  $X$ , notés  $n_{i*}$  :

$$n_{1*} = 5, \quad n_{2*} = 10 \quad \text{et} \quad n_{3*} = 15.$$

## Tables de contingence « complétées »

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS (TD 1 – EXERCICE 1)

<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>X</b>
<b>A</b>	0	0	2	3	5
<b>B</b>	1	3	4	2	10
<b>C</b>	4	6	5	0	15
<b>Y</b>	5	9	11	5	

- Effectifs marginaux de  $X$ , notés  $n_{i*}$  :

$$n_{1*} = 5, \quad n_{2*} = 10 \quad \text{et} \quad n_{3*} = 15.$$

- Effectifs marginaux de  $Y$ , notés  $n_{*j}$  :

$$n_{*1} = 5, \quad n_{*2} = 9, \quad n_{*3} = 11 \quad \text{et} \quad n_{*4} = 5.$$

## Tables de contingence « complétées »

1/2

TABLE DE CONTINGENCE DES EFFECTIFS (TD 1 – EXERCICE 1)

$(X, Y)$	0	1	2	3	$X$
A	0	0	2	3	5
B	1	3	4	2	10
C	4	6	5	0	15
Y	5	9	11	5	30

- Effectifs marginaux de  $X$ , notés  $n_{i*}$  :

$$n_{1*} = 5, \quad n_{2*} = 10 \quad \text{et} \quad n_{3*} = 15.$$

- Effectifs marginaux de  $Y$ , notés  $n_{*j}$  :

$$n_{*1} = 5, \quad n_{*2} = 9, \quad n_{*3} = 11 \quad \text{et} \quad n_{*4} = 5.$$

- Taille de la population : somme des eff. conjoints **et** somme des eff. marginaux de  $X$  **et** somme des eff. marginaux de  $Y$ .

## Tables de contingence « complétées »

2/2

TABLE DE CONTINGENCE DES FRÉQUENCES (TD 1 – EXERCICE 1)

<b>(X, Y)</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>X</b>
<b>A</b>	0	0	0,0667	0,1	0,1667
<b>B</b>	0,0333	0,1	0,1333	0,0667	0,3333
<b>C</b>	0,1333	0,2	0,1667	0	0,5
<b>Y</b>	0,1667	0,3	0,3667	0,1667	1

## Tables de contingence « complétées »

2/2

TABLE DE CONTINGENCE DES FRÉQUENCES (TD 1 – EXERCICE 1)

$(X, Y)$	0	1	2	3	$X$
A	0	0	0,0667	0,1	0,1667
B	0,0333	0,1	0,1333	0,0667	0,3333
C	0,1333	0,2	0,1667	0	0,5
Y	0,1667	0,3	0,3667	0,1667	1

## FRÉQUENCES MARGINALES

- de  $X$  (notées  $f_{i*}$ ) et de  $Y$  (notées  $f_{*j}$ ) :  $f_{3*} = 0,5$  ou  $f_{*2} = 0,3$ .

## Tables de contingence « complétées »

2/2

TABLE DE CONTINGENCE DES FRÉQUENCES (TD 1 – EXERCICE 1)

$(X, Y)$	0	1	2	3	$X$
A	0	0	0,0667	0,1	0,1667
B	0,0333	0,1	0,1333	0,0667	0,3333
C	0,1333	0,2	0,1667	0	0,5
Y	0,1667	0,3	0,3667	0,1667	1

## FRÉQUENCES MARGINALES

- de  $X$  (notées  $f_{j*}$ ) et de  $Y$  (notées  $f_{*j}$ ) :  $f_{3*} = 0,5$  ou  $f_{*2} = 0,3$ .
- Calcul par somme ou par quotient : **différence d'arrondi**.
  - ▶ *Privilégier le quotient (par  $N$ ) pour plus de précision.*

# Construction des profils-ligne

## FIGER $X$ À UNE DE SES VALEURS

- revient à **extraire une ligne** de la table de contingence des effectifs.
- revient à considérer (uniquement) une **sous-population**.

## Construction des profils-ligne

### FIGER $X$ À UNE DE SES VALEURS

- revient à **extraire une ligne** de la table de contingence des effectifs.
- revient à considérer (uniquement) une **sous-population**.

#### Définition

**Fréquence conditionnelle** de  $Y$  sachant  $X$  (figée) : proportion d'individus associés à la même valeur de  $Y$  dans la **sous-population** de  $X$ .

## Construction des profils-ligne

### FIGER $X$ À UNE DE SES VALEURS

- revient à **extraire une ligne** de la table de contingence des effectifs.
- revient à considérer (uniquement) une **sous-population**.

#### Définition

**Fréquence conditionnelle** de  $Y$  sachant  $X$  (figée) : proportion d'individus associés à la même valeur de  $Y$  dans la sous-population de  $X$ .

EXEMPLE (TD 1 – EXERCICE 1), FIGER  $X = B$

<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>Total</b>
1	3	4	2	10

# Construction des profils-ligne

## FIGER $X$ À UNE DE SES VALEURS

- revient à **extraire une ligne** de la table de contingence des effectifs.
- revient à considérer (uniquement) une **sous-population**.

### Définition

**Fréquence conditionnelle** de  $Y$  sachant  $X$  (figée) : proportion d'individus associés à la même valeur de  $Y$  dans la sous-population de  $X$ .

EXEMPLE (TD 1 – EXERCICE 1), FIGER  $X = B$

<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>Total</b>
1	3	4	2	10
0,1	0,3	0,4	0,2	1

# Profils-ligne

## Définition

**Profil-ligne** : table des fréquences conditionnelles pour  $X$  figée à une valeur donnée.

# Profils-ligne

## Définition

**Profil-ligne** : table des fréquences conditionnelles pour  $X$  figée à une valeur donnée.

## PROFILS-LIGNE (TD 1 – EXERCICE 1)

<b><math>Y X</math></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>A</b>	0	0	0,4	0,6
<b>B</b>	0,1	0,3	0,4	0,2
<b>C</b>	0,2667	0,4	0,3333	0

# Profils-ligne

## Définition

**Profil-ligne** : table des fréquences conditionnelles pour  $X$  figée à une valeur donnée.

## PROFILS-LIGNE (TD 1 – EXERCICE 1)

<b><math>Y X</math></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>A</b>	0	0	0,4	0,6
<b>B</b>	0,1	0,3	0,4	0,2
<b>C</b>	0,2667	0,4	0,3333	0

- La somme de **chaque ligne** vaut 1 (modulo les arrondis).
- La lecture en colonnes **n'a aucun sens**.

# Profils-ligne

## Définition

**Profil-ligne** : table des fréquences conditionnelles pour  $X$  figée à une valeur donnée.

## PROFILS-LIGNE (TD 1 – EXERCICE 1)

$Y X$	0	1	2	3
A	0	0	0,4	0,6
B	0,1	0,3	0,4	0,2
C	0,2667	0,4	0,3333	0

- La somme de **chaque ligne** vaut 1 (modulo les arrondis).
- La lecture en colonnes **n'a aucun sens**.
- La première cellule indique qu'il s'agit des profils-ligne.

# Construction des profils-colonne

## FIGER $Y$ À UNE DE SES VALEURS

- revient à **extraire une colonne** de la table de contingence des effectifs.
- revient à considérer (uniquement) une **sous-population**.

# Construction des profils-colonne

## FIGER $Y$ À UNE DE SES VALEURS

- revient à **extraire une colonne** de la table de contingence des effectifs.
- revient à considérer (uniquement) une **sous-population**.

### Définition

**Fréquence conditionnelle** de  $X$  sachant  $Y$  : proportion d'individus associés à la même valeur de  $X$  **dans la sous-population** de  $Y$  considérée.

## Construction des profils-colonne

**FIGER**  $Y$  À UNE DE SES VALEURS

- revient à **extraire une colonne** de la table de contingence des effectifs.
- revient à considérer (uniquement) une **sous-population**.

EXEMPLE (TD 1 – EXERCICE 1),

**FIGER**  $Y = 3$

<b>A</b>	3	
<b>B</b>	2	
<b>C</b>	0	
<b>Total</b>	5	

### Définition

**Fréquence conditionnelle** de  $X$  sachant  $Y$  : proportion d'individus associés à la même valeur de  $X$  dans la sous-population de  $Y$  considérée.

## Construction des profils-colonne

**FIGER**  $Y$  À UNE DE SES VALEURS

- revient à **extraire une colonne** de la table de contingence des effectifs.
- revient à considérer (uniquement) une **sous-population**.

EXEMPLE (TD 1 – EXERCICE 1),

**FIGER**  $Y = 3$

<b>A</b>	3	0,6
<b>B</b>	2	0,4
<b>C</b>	0	0
<b>Total</b>	5	1

### Définition

**Fréquence conditionnelle** de  $X$  sachant  $Y$  : proportion d'individus associés à la même valeur de  $X$  dans la **sous-population** de  $Y$  considérée.

# Profils-colonne

## Définition

**Profil-colonne** : table des fréquences conditionnelles pour  $Y$  figée à une valeur donnée.

# Profils-colonne

## Définition

**Profil-colonne** : table des fréquences conditionnelles pour  $Y$  figée à une valeur donnée.

## PROFILS-COLONNE (TD 1 – EXERCICE 1)

<b><math>X Y</math></b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>A</b>	0	0	0,1818	0,6
<b>B</b>	0,2	0,3333	0,3636	0,4
<b>C</b>	0,8	0,6667	0,4545	0

# Profils-colonne

## Définition

**Profil-colonne** : table des fréquences conditionnelles pour  $Y$  figée à une valeur donnée.

## PROFILS-COLONNE (TD 1 – EXERCICE 1)

<b>X Y</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>A</b>	0	0	0,1818	0,6
<b>B</b>	0,2	0,3333	0,3636	0,4
<b>C</b>	0,8	0,6667	0,4545	0

- La somme de **chaque colonne** vaut 1 (modulo les arrondis).
- La lecture en lignes **n'a aucun sens**.

# Profils-colonne

## Définition

**Profil-colonne** : table des fréquences conditionnelles pour  $Y$  figée à une valeur donnée.

## PROFILS-COLONNE (TD 1 – EXERCICE 1)

$X Y$	0	1	2	3
<b>A</b>	0	0	0,1818	0,6
<b>B</b>	0,2	0,3333	0,3636	0,4
<b>C</b>	0,8	0,6667	0,4545	0

- La somme de **chaque colonne** vaut 1 (modulo les arrondis).
- La lecture en lignes **n'a aucun sens**.
- La première cellule indique qu'il s'agit des profils-colonne.

# Notation des fréquences conditionnelles

## PRINCIPES

- On n'utilise **plus** les numéros d'indice, mais les **valeurs**.
- On utilise le symbole « | » qui peut se lire (selon le contexte) :  
« **parmi** »    ou    « **sachant que** »    ou    « **tel que** ».

# Notation des fréquences conditionnelles

## PRINCIPES

- On n'utilise plus les numéros d'indice, mais les valeurs.
- On utilise le symbole « | » qui peut se lire (selon le contexte) :  
« parmi » ou « sachant que » ou « tel que ».

## EXEMPLE (TD 1 – EXERCICE 1)

- Proportion d'hôtels notés 2 parmi ceux de catégorie  $B$  :
- Proportion d'hôtels de catégorie  $B$  parmi ceux notés 2 :

# Notation des fréquences conditionnelles

## PRINCIPES

- On n'utilise **plus** les numéros d'indice, mais les **valeurs**.
- On utilise le symbole « | » qui peut se lire (selon le contexte) :  
« **parmi** » ou « **sachant que** » ou « **tel que** ».

## EXEMPLE (TD 1 – EXERCICE 1)

- Proportion d'hôtels notés 2 parmi ceux de catégorie  $B$  :  
$$f_{Y=2|X=B} = 0,4.$$
- Proportion d'hôtels de catégorie  $B$  parmi ceux notés 2 :

# Notation des fréquences conditionnelles

## PRINCIPES

- On n'utilise plus les numéros d'indice, mais les valeurs.
- On utilise le symbole « | » qui peut se lire (selon le contexte) :  
« parmi » ou « sachant que » ou « tel que ».

## EXEMPLE (TD 1 – EXERCICE 1)

- Proportion d'hôtels notés 2 parmi ceux de catégorie  $B$  :  
$$f_{Y=2|X=B} = 0,4.$$
- Proportion d'hôtels de catégorie  $B$  parmi ceux notés 2 :  
$$f_{X=B|Y=2} = 0,3636.$$

# Notation des fréquences conditionnelles

## PRINCIPES

- On n'utilise plus les numéros d'indice, mais les valeurs.
- On utilise le symbole «  $|$  » qui peut se lire (selon le contexte) :  
« parmi » ou « sachant que » ou « tel que ».

## EXEMPLE (TD 1 – EXERCICE 1)

- Proportion d'hôtels notés 2 parmi ceux de catégorie  $B$  :

$$f_{Y=2|X=B} = 0,4.$$

- Proportion d'hôtels de catégorie  $B$  parmi ceux notés 2 :

$$f_{X=B|Y=2} = 0,3636.$$

## FORMULES DE CALCUL

$$f_{Y=y_j|X=x_i} = \frac{n_{ij}}{n_{i*}} \quad \text{et} \quad f_{X=x_i|Y=y_j} = \frac{n_{ij}}{n_{*j}}.$$

- 1 Trois types de distribution
  - Distribution jointe
  - Distributions marginales
  - Distributions conditionnelles

- 2 Représentations graphiques

- 3 Indépendance statistique

# Représentations classiques

## DISPARITION DES REPRÉSENTATIONS LIÉES AUX ECC OU FCC

- **Impossible** de définir des ECC ou FCC.
- Plus de polygone des FCC, de diagramme circulaire, etc.

# Représentations classiques

## DISPARITION DES REPRÉSENTATIONS LIÉES AUX ECC OU FCC

- **Impossible** de définir des ECC ou FCC.
- Plus de polygone des FCC, de diagramme circulaire, etc.

## PASSAGE EN 3D DES AUTRES REPRÉSENTATIONS

- Diagramme bâtons, polygone des effectifs ou de fréquences, etc.
- Difficile à réaliser et **peu lisible**.
- Utiles lorsque **réalisées sur machine**.

## Représentations classiques

### DISPARITION DES REPRÉSENTATIONS LIÉES AUX ECC OU FCC

- **Impossible** de définir des ECC ou FCC.
- Plus de polygone des FCC, de diagramme circulaire, etc.

### PASSAGE EN 3D DES AUTRES REPRÉSENTATIONS

- Diagramme bâtons, polygone des effectifs ou de fréquences, etc.
- Difficile à réaliser et **peu lisible**.
- Utiles lorsque **réalisées sur machine**.

### REPRÉSENTATION D'UN PROFIL-LIGNE OU PROFIL-COLONNE

- Diagramme bâtons ou histogramme.
- En 2D, donc lisible.

# Nuage de points

## PRINCIPE

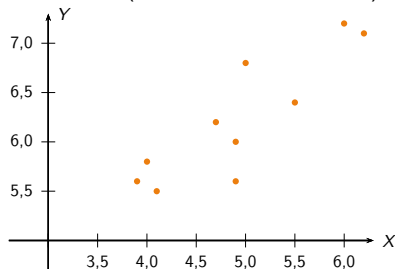
- **Graphe** (bidimensionnel).
- En abscisse : valeurs de  $X$ .
- En ordonnée : valeurs de  $Y$ .
- **Chaque individu** est représenté par un point d'abscisse sa valeur pour  $X$  et d'ordonnée sa valeur pour  $Y$ .

# Nuage de points

## PRINCIPE

- **Grphe** (bidimensionnel).
- En abscisse : valeurs de  $X$ .
- En ordonnée : valeurs de  $Y$ .
- **Chaque individu** est représenté par un point d'abscisse sa valeur pour  $X$  et d'ordonnée sa valeur pour  $Y$ .

## EXEMPLE (TD 3 – EXERCICE 1)

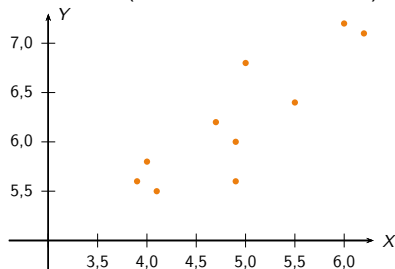


# Nuage de points

## PRINCIPE

- **Graph** (bidimensionnel).
- En abscisse : valeurs de  $X$ .
- En ordonnée : valeurs de  $Y$ .
- **Chaque individu** est représenté par un point d'abscisse sa valeur pour  $X$  et d'ordonnée sa valeur pour  $Y$ .

## EXEMPLE (TD 3 – EXERCICE 1)



- ▶ *Première (et unique) représentation d'une variable continue **non regroupée en classes**.*

- 1 Trois types de distribution
  - Distribution jointe
  - Distributions marginales
  - Distributions conditionnelles
- 2 Représentations graphiques
- 3 Indépendance statistique

## Idée générale et mise en pratique

### IDÉE TRANSVERSE AUX MATHÉMATIQUES

*Des « objets » sont **indépendants** lorsqu'**aucune** information supplémentaire sur l'un ne donne d'information sur l'autre.*

## Idée générale et mise en pratique

### IDÉE TRANSVERSE AUX MATHÉMATIQUES

Des « objets » sont *indépendants* lorsqu'*aucune* information supplémentaire sur l'un ne donne d'information sur l'autre.

#### Définition (Utilisable en pratique)

Des variables aléatoires sont *statistiquement indépendantes* lorsque :

$$n_{ij} = \frac{n_{i*} \times n_{*j}}{N} \quad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

## Idée générale et mise en pratique

### IDÉE TRANSVERSE AUX MATHÉMATIQUES

Des « objets » sont *indépendants* lorsqu'*aucune* information supplémentaire sur l'un ne donne d'information sur l'autre.

#### Définition (Utilisable en pratique)

Des variables aléatoires sont *statistiquement indépendantes* lorsque :

$$n_{ij} = \frac{n_{i*} \times n_{*j}}{N} \quad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

### PROBLÈMES LIÉS À L'INDÉPENDANCE STATISTIQUE

- Phénomène *rare*. Comment « travailler » avec ?
- Quel *lien* avec l'indépendance (plus large) des variables stat. ?

# Caractérisations équivalentes

## TROIS AUTRES CARACTÉRISATIONS ÉQUIVALENTES

- (i) **Toutes** les lignes des profils-ligne sont identiques entre elles et identiques à la ligne des fréquences marginales de  $Y$  :

$$f_{Y=y_j|X=x_i} = f_{*j} \quad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

## Caractérisations équivalentes

### TROIS AUTRES CARACTÉRISATIONS ÉQUIVALENTES

- (i) **Toutes** les lignes des profils-ligne sont identiques entre elles et identiques à la ligne des fréquences marginales de  $Y$  :

$$f_{Y=y_j|X=x_i} = f_{*j} \quad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

- (ii) **Toutes** les colonnes des profils-colonne sont identiques entre elles et identiques à la colonne des fréquences marginales de  $X$  :

$$f_{X=x_i|Y=y_j} = f_{i*} \quad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

## Caractérisations équivalentes

### TROIS AUTRES CARACTÉRISATIONS ÉQUIVALENTES

- (i) **Toutes** les lignes des profils-ligne sont identiques entre elles et identiques à la ligne des fréquences marginales de  $Y$  :

$$f_{Y=y_j|X=x_i} = f_{*j} \quad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

- (ii) **Toutes** les colonnes des profils-colonne sont identiques entre elles et identiques à la colonne des fréquences marginales de  $X$  :

$$f_{X=x_i|Y=y_j} = f_{i*} \quad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

- (iii) **Toutes** les fréquences conjointes sont égales au produit des fréquences marginales *ad-hoc* :

$$f_{ij} = f_{i*} \times f_{*j} \quad \text{pour tous } i \text{ et } j.$$

# FIN DU CHAPITRE 1

---