Chapitre 4. Séries chronologiques

R2.13 – Techniques quantitatives et représentations 2

D. Fourer

Département TC-Juvisy

Semestre 2 – 2023/2024

Qu'est-ce qu'une série chronologique ?

Définition

Série chronologique : Variable statistique dont les observations sont (régulièrement) repérées dans le temps.

Qu'est-ce qu'une série chronologique ?

Définition

Série chronologique : Variable statistique dont les observations sont (régulièrement) repérées dans le temps.

- Un individu est une observation, donc la taille de la population est le nombre d'observations.
- Modélisation : couple de variables aléatoires avec le temps comme première variable. (On a donc $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_N = N$.)

Qu'est-ce qu'une série chronologique ?

Définition

Série chronologique : Variable statistique dont les observations sont (régulièrement) repérées dans le temps.

- Un individu est une observation, donc la taille de la population est le nombre d'observations.
- Modélisation : couple de variables aléatoires avec le temps comme première variable. (On a donc $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_N = N$.)

Définition

La plage d'observation est (souvent) cyclique, composée de r répétitions d'une période de k observations (saisons). $N = k \times r$.

Construction de la série

PRINCIPALES COMPOSANTES

- Tendance (ou trend) t_i : évolution affine de la série sur la durée.

PRINCIPALES COMPOSANTES

- Tendance (ou trend) t_i : évolution affine de la série sur la durée.
- Variations saisonnières s_i : variations récurrentes (à chaque période) autour de la tendance. Série périodique.

Construction de la série

PRINCIPALES COMPOSANTES

- Tendance (ou trend) t_i : évolution affine de la série sur la durée.
- Variations saisonnières s_i : variations récurrentes (à chaque période) autour de la tendance. Série périodique.
- Résidus ε_i : erreurs dues à la stricte périodicité des variations saisonnières.

Construction de la série

Principales composantes

- Tendance (ou trend) t_i : évolution affine de la série sur la durée.
- Variations saisonnières s_i : variations récurrentes (à chaque période) autour de la tendance. Série périodique.
- Résidus ε_i : erreurs dues à la stricte périodicité des variations saisonnières.
- Variations accidentelles α_i : ajustements ponctuels sans régularité.

Principales composantes

- Tendance (ou trend) t_i : évolution affine de la série sur la durée.
- Variations saisonnières s_i : variations récurrentes (à chaque période) autour de la tendance. Série périodique.
- Résidus ε_i : erreurs dues à la stricte périodicité des variations saisonnières.
- Variations accidentelles α_i : ajustements ponctuels sans régularité.

Modélisation

- additive : $\widehat{y_i} = t_i + s_i + \varepsilon_i + \alpha_i$.
- multiplicative : $\widehat{y_i} = t_i \times s_i \times (1 + \varepsilon_i) \times \alpha_i$.

Principales composantes

- Tendance (ou trend) t_i : évolution affine de la série sur la durée.
- Variations saisonnières s_i : variations récurrentes (à chaque période) autour de la tendance. Série périodique.
- Résidus ε_i : erreurs dues à la stricte périodicité des variations saisonnières.
- Variations accidentelles α_i : ajustements ponctuels sans régularité.

Modélisation

- additive : $\widehat{y}_i = t_i + s_i + \varepsilon_i + \alpha_i$.
- multiplicative : $\widehat{y}_i = t_i \times s_i \times (1 + \varepsilon_i) \times \alpha_i$.

ÉNONCÉ

Le chiffre d'affaires mensuel (en millions d'euros) d'une entreprise entre janvier 2012 et décembre 2013 est le suivant :

Année	janv.	fév.	mars	avr.	mai	juin
2012	1 230	1 280	1 400	1 600	1 450	1 390
2013	1 590	1 640	1 800	1 990	1 870	1 910

Année	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
2012	1 280	930	1 080	1 400	1 500	1 550
2013	1 670	1 260	1 430	1 780	1 750	1 670

Énoncé

Le chiffre d'affaires mensuel (en millions d'euros) d'une entreprise entre janvier 2012 et décembre 2013 est le suivant :

Année	janv.	fév.	mars	avr.	mai	juin
2012	1 230	1 280	1 400	1 600	1 450	1 390
2013	1 590	1 640	1 800	1 990	1 870	1 910

Année	juil.	août	sept.	oct.	nov.	déc.
2012	1 280	930	1 080	1 400	1 500	1 550
2013	1 670	1 260	1 430	1 780	1 750	1 670

Mise en forme

- X. Mois des années numérotés de 1 à $N = 24$.
- Y. Chiffre d'affaires de l'entreprise avec :

$$y_1 = 1\,230, \quad y_2 = 1\,280, \quad \ldots, \quad y_{24} = 1\,670.$$


Chiffre d'affaires
2100
1900
1700
1500
1300
1100
900
Mois
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

La tendance

Définition

La tendance est la droite de régression de la série : $y = \widetilde{a}x + \widetilde{b}$.

- Valeurs : $t_1 = \widetilde{a} \times 1 + \widetilde{b}$, $t_2 = \widetilde{a} \times 2 + \widetilde{b}$, ..., $t_N = \widetilde{a} \times N + \widetilde{b}$.
- Comportement « fondamental » de la série.
- $y_i^0 = y_i - t_i$: série des écarts à la tendance.

La tendance

Définition

La tendance est la droite de régression de la série : $y = \widetilde{a}x + \widetilde{b}$.

- Valeurs : $t_1 = \widetilde{a} \times 1 + \widetilde{b}$, $t_2 = \widetilde{a} \times 2 + \widetilde{b}$, ..., $t_N = \widetilde{a} \times N + \widetilde{b}$.
- Comportement « fondamental » de la série.
- $y_i^0 = y_i - t_i$: série des écarts à la tendance.

ATTENTION !

Le coefficient de corrélation d'une série chronologique est souvent loin de 1.

PARAMÈTRES DE LA SÉRIE (À 10^{-3} PRÈS)

- Point moyen : $\overline{x} = 12,5$ et $\overline{y} = 1\,518,75$.
- $\sigma_X = 6,922$, $\sigma_Y = 260,901$ et $\text{cov}(X, Y) = 1\,027,708$.

PARAMÈTRES DE LA SÉRIE (À 10^{-3} PRÈS)

- Point moyen : $\overline{x} = 12,5$ et $\overline{y} = 1\,518,75$.
- $\sigma_X = 6,922$, $\sigma_Y = 260,901$ et $\mathrm{cov}(X, Y) = 1\,027,708$.

PARAMÈTRES DE LA DROITE DE RÉGRESSION (À 10^{-3} PRÈS)

- $\widetilde{a} = 21,448$ et $\widetilde{b} = 1\,250,652$.
- Pour information : $r(X, Y) = 0,545$.

Paramètres de la série (à 10^{-3} près)

- Point moyen : $\overline{x} = 12,5$ et $\overline{y} = 1\,518,75$.
- $\sigma_X = 6,922$, $\sigma_Y = 260,901$ et $\text{cov}(X,Y) = 1\,027,708$.

Paramètres de la droite de régression (à 10^{-3} près)

- $\widetilde{a} = 21,448$ et $\widetilde{b} = 1\,250,652$.
- Pour information : $r(X,Y) = 0,545$.

Paramètres de la série (à 10^{-3} près)

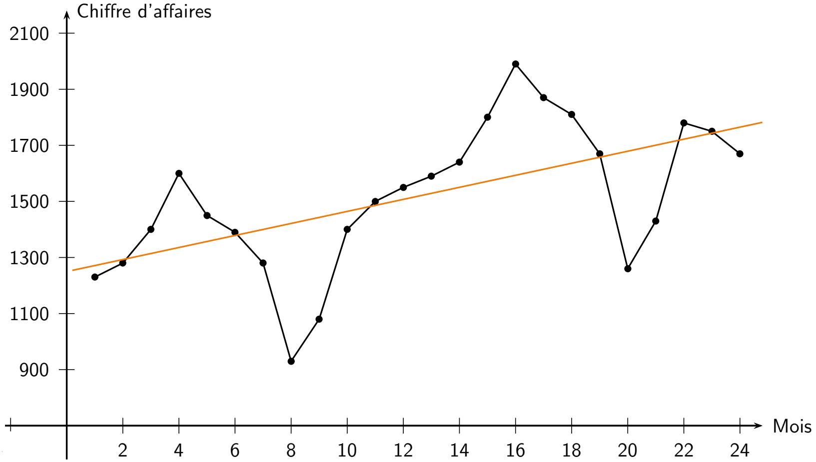
- Point moyen : $\overline{x} = 12,5$ et $\overline{y} = 1\,518,75$.
- $\sigma_X = 6,922$, $\sigma_Y = 260,901$ et $\operatorname{cov}(X, Y) = 1\,027,708$.

Paramètres de la droite de régression (à 10^{-3} près)

- $\widetilde{a} = 21,448$ et $\widetilde{b} = 1\,250,652$.
- Pour information : $r(X, Y) = 0,545$.

Valeurs de la tendance (à 10^{-3} près)

$$t_1 = 21,448 \times 1 + 1\,250,652 = 1\,272,100,$$
$$t_2 = 21,448 \times 2 + 1\,250,652 = 1\,293,548, \quad \dots,$$
$$t_{24} = 21,448 \times 24 + 1\,250,652 = 1\,755,400.$$


Chiffre d'affaires
2100
1900
1700
1500
1300
1100
900
Mois
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

Les variations saisonnières

Définition

Coefficient de variation saisonnière (CVS) σ_i : pour chaque « saison », moyenne des écarts à la tendance (série y_i^0) de toutes les répétitions de la saison en question.

Les variations saisonnières

Définition

Coefficient de variation saisonnière (CVS) σ_i : pour chaque « saison », moyenne des écarts à la tendance (série y_i^0) de toutes les répétitions de la saison en question.

- Un même CVS pour toutes les ocurrences d'une saison.
- Série des variations saisonnières (s_i) : périodisation des CVS (à chaque occurrence de leur saison).
  - *Série de moyenne nulle.*

Définition

Coefficient de variation saisonnière (CVS) σ_i : pour chaque « saison », moyenne des écarts à la tendance (série y_i^0) de toutes les répétitions de la saison en question.

- Un même CVS pour toutes les ocurrences d'une saison.
- Série des variations saisonnières (s_i) : périodisation des CVS (à chaque occurrence de leur saison).
  - *Série de moyenne nulle.*

ATTENTION !

On ne tient compte dans ce cours, ni des résidus, ni des variations accidentelles.

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

VALEURS DES 12 CVS (À 10^{-3} PRÈS)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\big((1\,230 - 1\,272,100) + (1\,590 - 1\,529,474)\big) = 9,213, \quad \ldots,$$
$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\big((1\,550 - 1\,508,026) + (1\,670 - 1\,755,400)\big) = -26,713.$$

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

VALEURS DES 12 CVS (À 10^{-3} PRÈS)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\big((1\,230 - 1\,272{,}100) + (1\,590 - 1\,529{,}474)\big) = 9{,}213, \quad \ldots,$$
$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\big((1\,550 - 1\,508{,}026) + (1\,670 - 1\,755{,}400)\big) = -26{,}713.$$

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

VALEURS DES 12 CVS (À 10^{-3} PRÈS)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\big((1\,230 - 1\,272,100) + (1\,590 - 1\,529,474)\big) = 9,213, \quad \ldots,$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\big((1\,550 - 1\,508,026) + (1\,670 - 1\,755,400)\big) = -26,713.$$

Décomposition de la plage d'observation ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

Valeurs des 12 CVS (à 10^{-3} près)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\Big((1\,230 - 1\,272,100) + (1\,590 - 1\,529,474)\Big) = 9,213, \quad \ldots,$$
$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\Big((1\,550 - 1\,508,026) + (1\,670 - 1\,755,400)\Big) = -26,713.$$

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

VALEURS DES 12 CVS (À 10^{-3} PRÈS)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\big((1\,230 - 1\,272{,}100) + (1\,590 - 1\,529{,}474)\big) = 9{,}213, \quad \ldots,$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\big((1\,550 - 1\,508{,}026) + (1\,670 - 1\,755{,}400)\big) = -26{,}713.$$

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

VALEURS DES 12 CVS (À 10^{-3} PRÈS)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\big((1\,230 - 1\,272,100) + (1\,590 - 1\,529,474)\big) = 9,213, \quad \ldots,$$
$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\big((1\,550 - 1\,508,026) + (1\,670 - 1\,755,400)\big) = -26,713.$$

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

VALEURS DES 12 CVS (À 10^{-3} PRÈS)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\big((1\,230 - 1\,272,100) + (1\,590 - 1\,529,474)\big) = 9,213, \quad \ldots,$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\big((1\,550 - 1\,508,026) + (1\,670 - 1\,755,400)\big) = -26,713.$$

Exemple (Cours)

Les variations saisonnières

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

VALEURS DES 12 CVS (À 10^{-3} PRÈS)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\big((1\,230 - 1\,272,100) + (1\,590 - 1\,529,474)\big) = 9,213, \quad \dots,$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\big((1\,550 - 1\,508,026) + (1\,670 - 1\,755,400)\big) = -26,713.$$

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

VALEURS DES 12 CVS (À 10^{-3} PRÈS)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\big((1\,230 - 1\,272{,}100) + (1\,590 - 1\,529{,}474)\big) = 9{,}213, \quad \dots,$$
$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\big((1\,550 - 1\,508{,}026) + (1\,670 - 1\,755{,}400)\big) = -26{,}713.$$

VALEURS DES VARIATIONS SAISONNIÈRES (À 10^{-3} PRÈS)

$$s_1 = s_{13} = s_{25} = \cdots = 9{,}213, \quad \dots, \quad s_{12} = s_{24} = s_{36} = \cdots = -26{,}713.$$

DÉCOMPOSITION DE LA PLAGE D'OBSERVATION ($N = k \times r$)

- période = année avec $r = 2$ (répétitions).
- « saisons »= mois avec $k = 12$ (« saisons » par période).

VALEURS DES 12 CVS (À 10^{-3} PRÈS)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\big((1\,230 - 1\,272{,}100) + (1\,590 - 1\,529{,}474)\big) = 9{,}213, \quad \dots,$$
$$\sigma_{12} = \frac{1}{2}\big((1\,550 - 1\,508{,}026) + (1\,670 - 1\,755{,}400)\big) = -26{,}713.$$

VALEURS DES VARIATIONS SAISONNIÈRES (À 10^{-3} PRÈS)

$$s_1 = s_{13} = s_{25} = \cdots = 9{,}213, \quad \dots, \quad s_{12} = s_{24} = s_{36} = \cdots = -26{,}713.$$

MODÉLISATION DES DONNÉES EXISTANTES (À 10^{-3} PRÈS)

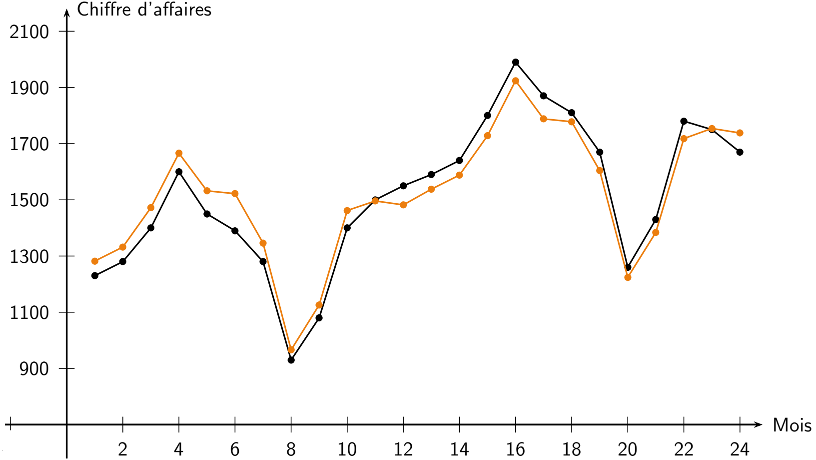
$$\widetilde{y}_1 = t_1 + s_1 = 1\,281,313, \quad \widetilde{y}_2 = t_2 + s_2 = 1\,331,313,$$
$$\widetilde{y}_3 = t_3 + s_3 = 1\,471,313, \quad \widetilde{y}_4 = t_4 + s_4 = 1\,666,313, \quad \ldots,$$
$$\widetilde{y}_{23} = t_{23} + s_{23} = 1\,753,687, \quad \text{et} \quad \widetilde{y}_{24} = t_{24} + s_{24} = 1\,738,687.$$

MODÉLISATION DES DONNÉES EXISTANTES (À 10^{-3} PRÈS)

$$\widetilde{y}_1 = t_1 + s_1 = 1\,281{,}313, \quad \widetilde{y}_2 = t_2 + s_2 = 1\,331{,}313,$$
$$\widetilde{y}_3 = t_3 + s_3 = 1\,471{,}313, \quad \widetilde{y}_4 = t_4 + s_4 = 1\,666{,}313, \quad \ldots,$$
$$\widetilde{y}_{23} = t_{23} + s_{23} = 1\,753{,}687, \quad \text{et} \quad \widetilde{y}_{24} = t_{24} + s_{24} = 1\,738{,}687.$$

PROJECTION SUR LA PÉRIODE SUIVANTE (À 10^{-3} PRÈS)

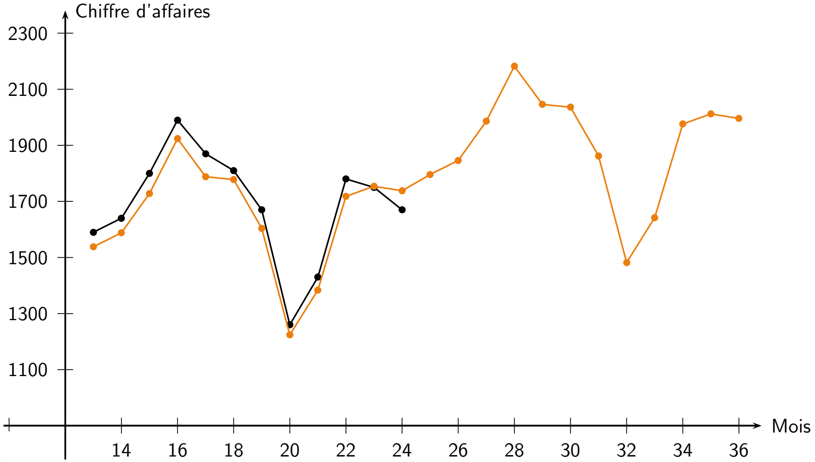
$$\widetilde{y}_{25} = t_{25} + s_{25} = 1\,796{,}061, \quad \widetilde{y}_{26} = t_{26} + s_{26} = 1\,846{,}061,$$
$$\widetilde{y}_{27} = t_{27} + s_{27} = 1\,986{,}061, \quad \widetilde{y}_{28} = t_{28} + s_{28} = 2\,181{,}061, \quad \ldots,$$
$$\widetilde{y}_{35} = t_{35} + s_{35} = 2\,011{,}061, \quad \text{et} \quad \widetilde{y}_{36} = t_{36} + s_{36} = 1\,7996{,}061.$$



Chiffre d'affaires
2100
1900
1700
1500
1300
1100
900
Mois
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24

Exemple (Cours)

Graphe en projection sur la période suivante



FIN DU CHAPITRE 4