

Nouvelles formules de synthèse de la transformée de Fourier à court terme avec une fenêtre d'analyse modifiée

Dominique Fourer¹, François Auger², Eric Chassande-Mottin³ et Patrick Flandrin⁴

¹IBISC - Univ. Evry

²Nantes Université, IREENA, UR 4642

³Univ. Paris Cité, CNRS, Astroparticule et Cosmologie

⁴Lab. de Physique - ENS de Lyon

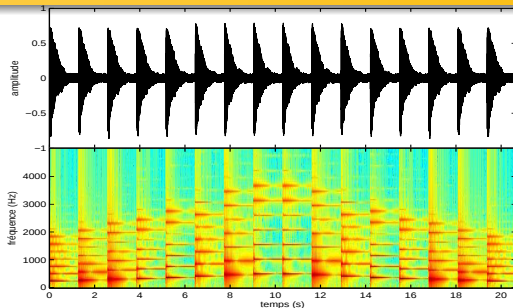
29 août 2025



Plan

- ① Introduction
- ② Nouvelles formules de synthèse de la TFCT
 - Formules utilisant la marginale en temps
 - Formules utilisant la marginale en fréquence
 - Liens avec les opérateurs de réallocation
- ③ Simulations numériques
- ④ Conclusion

Analyse temps-fréquence



Signal et spectrogramme d'un son de piano jouant la gamme majeure de Do.

Motivation

- Adaptée pour les signaux non stationnaires et multi-composantes
- De nombreuses méthodes efficaces reposent sur la Transformée de Fourier à court terme (TFCT) (estimation de paramètres, modélisation, transformation, compression, etc.)
- Représentation intuitive en audio (notion de fréquence instantannée [Ville 1948])

Transformée de Fourier à court terme (TFCT)

Pour une fenêtre d'analyse $h \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, on définit la TFCT d'un signal $x \in L^2(\mathbb{R})$ par :

$$F_x^h(t, \omega) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t - \tau)^* e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} F_x(\omega + \Omega) F_h(-\Omega)^* e^{j\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \quad (2)$$

avec $j^2 = -1$ et z^* le conjugué complexe de z . $F_x(\omega) = \int_{\mathbb{R}} x(t) e^{-j\omega t} dt$ (resp. $F_h(\omega)$) la transformée de Fourier de x (resp. h).

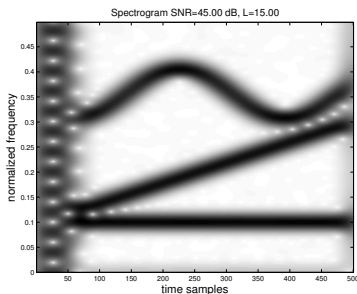
Le spectrogramme de x est donné par $|F_x^h(t, \omega)|^2$.

La réallocation du spectrogramme [Kodera et al., 76] [Auger, Flandrin, 95]

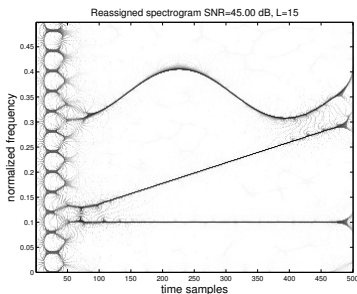
$$\hat{t}(t, \omega) = t - \operatorname{Re} \left(\frac{F_x^{Th}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) \quad , \text{ avec } Th(t) = t h(t) \quad (3)$$

$$\hat{\omega}(t, \omega) = \omega + \operatorname{Im} \left(\frac{F_x^{Dh}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) \quad , \text{ avec } Dh(t) = \frac{dh}{dt}(t) \quad (4)$$

$$R_x(t, \omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left| F_x^h(\tau, \Omega) \right|^2 \delta(t - \hat{t}(\tau, \Omega)) \delta(\omega - \hat{\omega}(\tau, \Omega)) d\tau \frac{d\Omega}{2\pi} \quad (5)$$



(a) $|F_x^h(t, \omega)|^2$



(b) $|R_x^h(t, \omega)|^2$

Représentation non inversible.

Reconstruction du signal 1/2

Marginale en temps

Pour une fréquence arbitraire, $\omega_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt &= \iint_{\mathbb{R}^2} x(\tau) h(t - \tau)^* e^{-j\omega\tau} e^{-j\omega_0 t} dt d\tau \\
 &= \int_{\mathbb{R}} h(u)^* e^{-j\omega_0 u} du \int_{\mathbb{R}} x(\tau) e^{-j(\omega + \omega_0)\tau} d\tau \\
 &= F_h(-\omega_0)^* F_x(\omega + \omega_0)
 \end{aligned} \tag{6}$$

Si $\omega_0 = 0$ et $F_h(0) \neq 0$, on a :

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{F_h(0)^*} \iint_{\mathbb{R}^2} F_x^h(\tau, \omega) e^{j\omega t} d\tau \frac{d\omega}{2\pi}} \tag{7}$$

Reconstruction du signal 2/2

Marginale en fréquence

Pour un instant arbitraire, $t_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega(t-t_0)} \frac{d\omega}{2\pi} &= \iint_{\mathbb{R}^2} x(\tau) h(t-\tau)^* e^{j\omega(t-\tau-t_0)} d\tau \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \int_{\mathbb{R}} x(\tau) h(t-\tau)^* \delta(t-\tau-t_0) d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

$$= x(t-t_0) h(t_0)^* \quad (9)$$

Si $t_0 = 0$ et $h(0) \neq 0$, on a :

$$x(t) = \frac{1}{h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (10)$$

Idées principales

- Généraliser l'usage des formules de synthèse avec des fenêtres d'analyse particulières $\mathcal{D}h(t) = \frac{dh}{dt}(t)$ et $\mathcal{T}h(t) = t \cdot h(t)$.
- Traiter les situations indéterminées (forme $\frac{0}{0}$) avec la règle de l'Hôpital.

Rappel : Théorème de l'Hôpital

Pour f et g , des fonctions dérivables au voisinage de x_0 . Si $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et si $g'(x_0) \neq 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \quad (11)$$

Preuve : Utiliser le théorème des accroissements finis (TAF) de Cauchy.

Marginale en temps

Si $F_h(0) = 0$, et si $\frac{\partial F_h}{\partial \omega_0}(0) \neq 0$, on peut utiliser la règle de l'Hôpital avec l'Eq.(7) : $F_x(\omega) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} F_x(\omega + \omega_0) =$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt}{F_h(-\omega_0)^*} &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \omega_0} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt}{\frac{\partial}{\partial \omega_0} \int_{\mathbb{R}} h(u)^* e^{-j\omega_0 u} du} \\ &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^h(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt}{\underbrace{\int_{\mathbb{R}} u h(u)^* e^{-j\omega_0 u} du}_{\mathcal{T}h(u)^*}} = \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^h(t, \omega) dt}{F_{\mathcal{T}h}(0)^*} \end{aligned} \quad (12)$$

Cela permet d'obtenir la formule de synthèse suivante après transformée de Fourier inverse, quand $F_{\mathcal{T}h}(0) \neq 0$:

$$x(t) = \frac{1}{F_{\mathcal{T}h}(0)^*} \iint_{\mathbb{R}^2} \tau F_x^h(\tau, \omega) e^{j\omega t} d\tau \frac{d\omega}{2\pi} \quad (13)$$

$\mathcal{T}^n h$ (généralisation)

Si on remplace h par $\mathcal{T}^n h$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dans l'Eq. (7), on obtient :

$$F_x(\omega + \omega_0) = \frac{1}{F_{\mathcal{T}^n h}(-\omega_0)^*} \int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{T}^n h}(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt \quad (14)$$

Pour $\omega_0 = 0$, si $F_{\mathcal{T}^n h}(0) = 0$ et $F_{\mathcal{T}^{n+1} h}(0) \neq 0$, on peut utiliser à nouveau la règle de l'Hôpital :

$$F_x(\omega) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} F_x(\omega + \omega_0) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \omega_0} \left[\int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{T}^n h}(t, \omega) e^{-j\omega_0 t} dt \right]}{\frac{d}{d\omega_0} [F_{\mathcal{T}^n h}(-\omega_0)^*]} \quad (15)$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^{\mathcal{T}^n h}(t, \omega) dt}{F_{\mathcal{T}^{n+1} h}(0)^*} \quad (16)$$

$\mathcal{DT}^n h$ (généralisation)

Si on remplace h par $\mathcal{DT}^n h$ dans l'Eq. (12), le dénominateur fait apparaître $F_{\mathcal{TD}\mathcal{DT}^n h}(0)^*$ reformulé ainsi :

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{TD}\mathcal{DT}^n h}(\omega) &= j \frac{d}{d\omega} [F_{\mathcal{DT}^n h}(\omega)] = j \frac{d}{d\omega} \left[\omega j^{n+1} \frac{d^n}{d\omega^n} F_h(\omega) \right] \\ &= j^{n+2} \frac{d^n}{d\omega^n} F_h(\omega) + j\omega j^{n+1} \frac{d^{n+1}}{d\omega^{n+1}} F_h(\omega) \\ &= -F_{\mathcal{DT}^n h}(\omega) + F_{\mathcal{DT}^{n+1} h}(\omega). \end{aligned} \quad (17)$$

Donc, si $F_{\mathcal{TD}\mathcal{DT}^n h}(0) \neq 0$, l'Eq. (16) conduit à :

$$F_x(\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^{\mathcal{DT}^n h}(t, \omega) dt}{F_{\mathcal{TD}\mathcal{DT}^{n+1} h}(0)^*} = \frac{\int_{\mathbb{R}} t F_x^{\mathcal{DT}^n h}(t, \omega) dt}{F_{\mathcal{DT}^{n+1} h}(0)^* - F_{\mathcal{DT}^n h}(0)^*} \quad (18)$$

$\mathcal{D}^n h$ (généralisation)

En remplaçant h par $\mathcal{D}^n h(t)$ dans l'Eq. (10), $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si $\mathcal{D}^n h(t_0) \neq 0$, alors on a :

$$x(t - t_0) = \frac{1}{\mathcal{D}^n h(t_0)^*} \int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{D}^n h}(t, \omega) e^{j\omega(t-t_0)} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (19)$$

Si $\mathcal{D}^n h(0) = 0$ et $\mathcal{D}^{n+1} h(0) \neq 0$, on peut utiliser la règle de l'Hôpital, car $\frac{d}{dt}[\mathcal{D}^n h(t)] = \mathcal{D}^{n+1} h(t)$, ce qui permet d'écrire :

$$x(t) = \frac{1}{j\mathcal{D}^{n+1} h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} \omega F_x^{\mathcal{D}^n h}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (20)$$

$\mathcal{T}\mathcal{D}^n h$ (généralisation)

En remplaçant h par $\mathcal{T}\mathcal{D}^n h$, $\forall n \in \mathbb{N}$, on remarque :

$$\frac{d}{dt}[\mathcal{T}\mathcal{D}^n h(t)] = \mathcal{D}^n h(t) + \underbrace{t\mathcal{D}^{n+1}h(t)}_{\mathcal{T}\mathcal{D}^{n+1}h(t)}. \quad (21)$$

Comme $\mathcal{T}\mathcal{D}^n h(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \mathcal{T}\mathcal{D}^n h(t) = \mathcal{D}^n h(0)$.

Ainsi, lorsque $\mathcal{D}^n h(0) \neq 0$, on obtient :

$$x(t) = \frac{1}{j\mathcal{D}^n h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} \omega F_x^{\mathcal{T}\mathcal{D}^n h}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (22)$$

Opérateur $\hat{t}$

De même, en remplaçant h par $\mathcal{T}h$ dans l'Eq. (10), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) + j \operatorname{Im} \left(\frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) \right) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} (t - \hat{t}_x(t, \omega)) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\
 &\quad + j \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} \left(\frac{F_x^{\mathcal{T}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$= x(t) \mathcal{T}h(0)^* = 0 \tag{24}$$

Opérateur $\hat{\omega}$

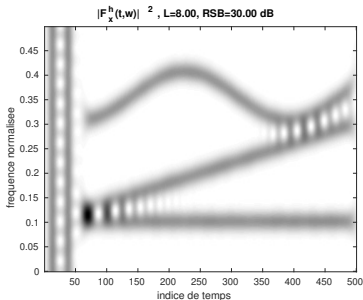
En remplaçant h par $\mathcal{D}h$ dans l'Eq. (10), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} &= \int_{\mathbb{R}} \frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) + j \operatorname{Im} \left(\frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) \right) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\
 &= j \int_{\mathbb{R}} (\hat{\omega}_x(t, \omega) - \omega) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}} \operatorname{Re} \left(\frac{F_x^{\mathcal{D}h}(t, \omega)}{F_x^h(t, \omega)} \right) F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{25}
 \end{aligned}$$

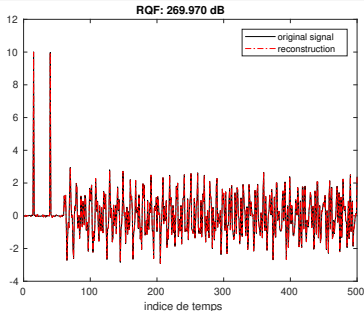
$$= x(t) \mathcal{D}h(0)^* \tag{26}$$

qui vaut 0 quand $\mathcal{D}h(0) = 0$, (ie. pour une fenêtre d'analyse symétrique centrée en 0).

Expérience



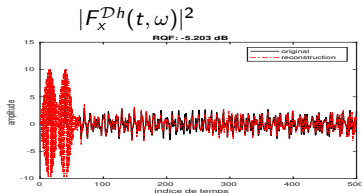
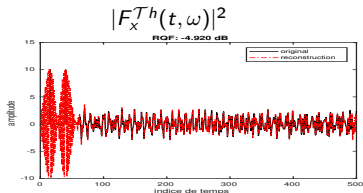
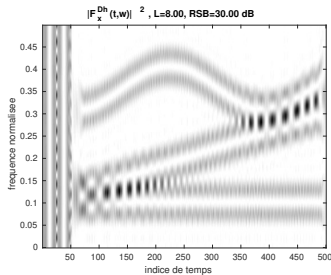
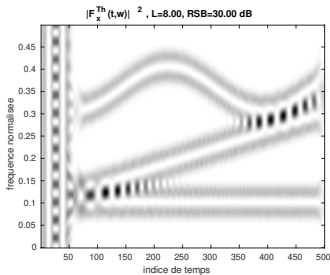
$$|F_x^h(t, \omega)|^2$$



$$\hat{x}(t) = \frac{1}{h(\mathbf{0})^*} \int_{\mathbb{R}} F_x^h(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

- Signal synthétique multicomposante mélangé à un bruit blanc (RSB¹=30 dB)
- Fenêtre d'analyse gaussienne de largeur L : $h[n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}L} e^{-\frac{n^2}{2L^2}}$
- Approximation rectangulaire (période d'échantillonnage T_s , nombre d'indices fréquentiels $M = 500$) : $F_x^h[n, m] \approx F_x^h(nT_s, 2\pi \frac{m}{MT_s})$
- Qualité de reconstruction : $RQF(x, \hat{x}) = \frac{||x||_2^2}{||x - \hat{x}||_2^2}$

Reconstruction utilisant la règle de l'Hôpital



$$\frac{1}{jh(0)^*} \int_{\mathbb{R}} \omega F_x^{Th}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$\frac{1}{j\mathcal{D}^2 h(0)^*} \int_{\mathbb{R}} \omega F_x^{Dh}(t, \omega) e^{j\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

Reconstruction de x impossible à partir de F_x^{Th} et F_x^{Dh} avec les marginales classiques.

Conclusion

Bilan

- Nous introduisons plusieurs familles de formules de synthèse de la TFCT reposant sur des fenêtres d'analyse particulières
- Permet la reconstruction du signal à partir des fenêtres d'analyse modifiées $F_x^{\mathcal{D}h}$ et $F_x^{\mathcal{T}h}$ (impossible avec les marginales classiques)
- Certaines formules font naturellement apparaître les opérateurs de réallocation

Limitations

- Quelques problèmes de stabilité numérique observés sur les reconstructions utilisant la règle de l'Hôpital.
- Besoin d'une étude approfondie des formules de synthèse obtenues avec plus de simulations numériques

⇒ Travail préliminaire pour développer de nouveaux outils inspirés du synchrosqueezing pour l'extraction des composantes présentes dans un signal.

Merci

Code Matlab :

<https://github.com/dfourer/STFTmarginals>

Lien vers l'article GRETSI 2025 :

